

24

Обратимость оператора  $E - A$ . Открытость множества обратимых операторов, сходимость обратных операторов.

$X$  — банах,  $A: X \rightarrow X, \|A\| < 1$ . Тогда  $op-р (E - A)$  — обратимый.

Введем послед-ть  $S_n = E + A + A^2 + \dots + A^n$ ;  $op$ , очевидно, ограничен.  $\|S_{n+m} - S_n\| = \|A^{n+1} + \dots + A^{n+m}\| \leq \|A\|^{n+1} + \dots + \|A\|^{n+m} = \|A\|^{n+1} \frac{1 - \|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|} \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} < \varepsilon \Rightarrow S_n$  — фундаментальная

$S_n \in L(X \rightarrow X)$  — полная пр-ва, пусть  $S_n \rightarrow S \in L(X, X)$

$$S_n(E - A) = E - A^{n+1}, (E - A)S_n = E - A^{n+1}$$

при  $n \rightarrow \infty$   $S(E - A) = E, (E - A)S = E \Rightarrow$

$$S = (E - A)^{-1}, \|S\| \leq \|E\| + \|A\| + \|A^2\| + \dots = \frac{1}{1 - \|A\|} \text{ ч.т.д.}$$

Сл.  $\|(E - A)^{-1} - E\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$

(об устойчивости)  $\square A: X \rightarrow Y$  — лине. обратим.  $op-р$ , где  $X$  — банах,  $Y$  — лине. нормир;  $B \in L(X, Y)$  — лине.  $op-р$ ;  $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ , то  $B$  обратим

$$B = A + (B - A) = A(E - A^{-1}(B - A)); \|A^{-1}(B - A)\| < 1 \Rightarrow (E - A^{-1}(B - A)) \text{ — обратим} \Rightarrow B^{-1} = (E - A^{-1}(B - A))^{-1} \cdot A^{-1}$$

Сл. Мн-во обратим.  $op-ов$  в  $L(X, Y)$  открытое

$\square A: X \rightarrow Y, X$  — банах,  $A$  — обратим.  $op-р, A_n \in L(X, Y)$  — лине.  $op-р, \|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Тогда  $\exists N: \forall n > N$   $A_n$  обратим, и  $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

▲  $\exists N, n > N$   $A_n$  - сдв - следуют из при условии;

$$A_n = A + (A_n - A) = A(E + A^{-1}(A_n - A)) \Rightarrow A_n^{-1} = (E + A^{-1}(A_n - A))^{-1} A^{-1};$$

$$A_n^{-1} - A^{-1} = \ominus \quad \text{(crossed out)}$$

$$\ominus [E - A^{-1}(A_n^{-1} - A)]^{-1} A^{-1}; \quad \|A_n^{-1} - A^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A^{-1}(A - A_n)\| \cdot \frac{1}{1 - \|A^{-1}(A - A_n)\|} \leq \frac{\|A\|^{-2} \cdot \|A_n - A\|}{1 - \|A\|^{-1} \cdot \|A_n - A\|},$$

что требуется к 0. У.Т.Д. ■